Notiztitel 16.12.2011

Lösungsskizzen

geg:

ges:

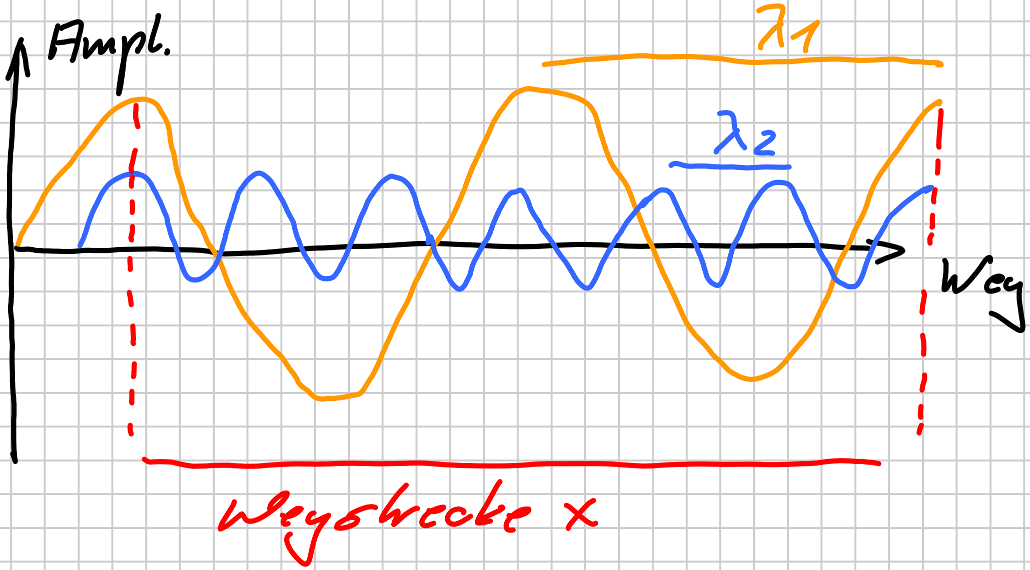
Skizze: → Zusammenhang gegebener und gesuchter Größen

Voraussetz:

Lösung (inkl. Einheitenanalyse)

Zwei Wellen laufen mit einer Geschwindigkeit von 340 m/s in gleiche Richtung. Die Frequenz der einen Welle sei 300 Hz, die der anderen Welle 240 Hz. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird für beide Wellen am selben Ort die maximale Auslenkung (Amplitude) gemessen.

Nach welcher Wegstrecke und nach welcher Zeit erreichen beide Wellen wieder gleichzeitig ihre maximale Auslenkung?



Lösung

für Wegstrecke x gilt $x = n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot \lambda_2$ (n: Zahl Wellenzüge)

$$n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot \lambda_2 \Rightarrow \frac{n_1 \cdot c}{f_1} = \frac{n_2 \cdot c}{f_2} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{300}{240} = \frac{5}{4} \Rightarrow n_1 = 5$$

$$n_2 = 4$$

$$x = 5{,}\overline{6}\ m$$

$$t = 0{,}01\overline{6}\ s$$

Sie wohnen in einer Gegend, in der ständig ein Wind mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit von $v = 10$ m/s weht.

Sie beschließen, die Energieversorgung Ihres Hauses (Elektro, Heizung, Warmwasser, ...) auf Windkraft umzustellen.

Ihr Energieberater hat berechnet, dass das geplante Windrad eine Leistung von 19,2 kW bereitstellen muss. Die Dichte der Luft in Ihrer Gegend beträgt 1,25 kg/m³.

Wie lang müssen die Rotorblätter Ihrer Windkraftanlage sein bei einem Wirkungsgrad von $c_W = 0{,}15$?

$\Rightarrow$ Formelsammlung: $F_W = \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$

$\Rightarrow$ F_W ?? :(

$\Rightarrow$ $P = \frac{E}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v \Rightarrow \underline{\underline{F = \frac{P}{v}}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{v} = \frac{1}{2} c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{c_w}{2} \cdot A \cdot \rho \cdot v^3 \\ A &= \pi r^2 \end{aligned}\right\} \quad P = \frac{c_w \cdot \pi}{2} \cdot \rho \cdot r^2 \cdot v^3$$

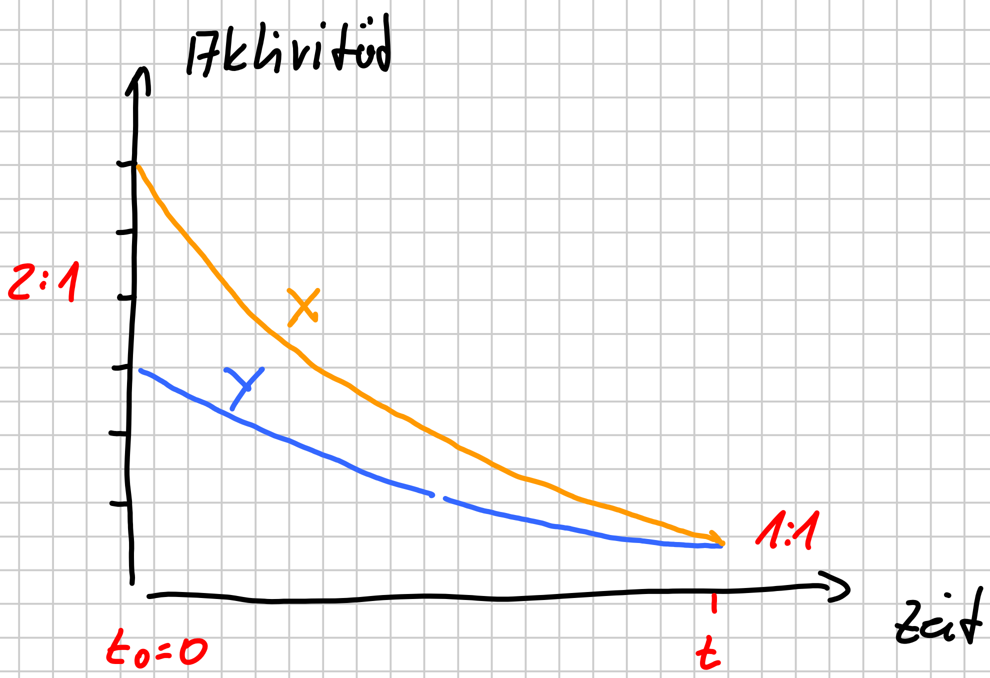
$$r = \sqrt{\frac{2P}{c_w \cdot \pi \cdot \rho \cdot v^3}}$$

$$\underline{\underline{r = 8{,}07\,m}}$$

Gegeben sind zwei radioaktive Isotope X und Y, von denen wir das folgende wissen:

- Die Aktivität A des Isotops X sinkt aller 12 Tage um 87,5%
- Die Aktivitäten beider Isotope verhalten sich zu einem Anfangszeitpunkt wie A(X) : A(Y) = 2 : 1
- 6 Tage später ist dieses Verhältnis 1 : 1

Wie groß sind die Halbwertszeiten $t_{1/2}$ beider Isotope?



X :

$$0{,}125 = e^{-\lambda_x \cdot 12d}$$

$$\ln(0{,}125) = -\lambda_x \cdot 12d = -\frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \cdot 12d \qquad \Big| -\ln(2) = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{\ln(0{,}125)} \cdot 12d$$

$$\underline{\underline{t_{1/2} = 4\,d}}$$

Ansatz für Zeitverlauf der Aktivitäten:

$\Rightarrow$ $A_x(t) = 2A_0\, e^{-\lambda_x \cdot t}$

$A_y(t) = A_0\, e^{-\lambda_y \cdot t}$

$\Rightarrow$ erfüllt Forderung nach $A_x : A_y = 2:1$ für $t_0 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ wir suchen aber $t_{1/2}(y)$ für eine Zeit $t = 6d \neq t_0$

$$\Rightarrow \quad 2A_0 e^{-\lambda_x \cdot t} = A_0 e^{-\lambda_y \cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad \ln 2 - \lambda_x \cdot t = -\lambda_y \cdot t$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_y = \lambda_x - \frac{\ln 2}{t}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{\ln 2}}{t_{1/2}(y)} = \frac{\cancel{\ln 2}}{t_{1/2}(x)} - \frac{\cancel{\ln 2}}{t}$$

$$\frac{1}{t_{1/2}(y)} = \frac{1}{4d} - \frac{1}{6d}$$

$$= \frac{6}{24d} - \frac{4}{24d}$$

$$= \frac{2}{24} \frac{1}{d}$$

$$t_{1/2}(y) = 12\,d$$

Die elektrische Leitfähigkeit σ eines runden Titanstabes soll ermittelt werden. Dazu wird das Ohmsche Gesetz sowie die Formel $R = l/(A \cdot \sigma)$ benutzt.

Durch Messungen werden die Länge l des Stabes, sein Durchmesser d, die Stromstärke I des durch den Stab fließenden Stromes sowie der Spannungsabfall U über die Stablänge ermittelt.

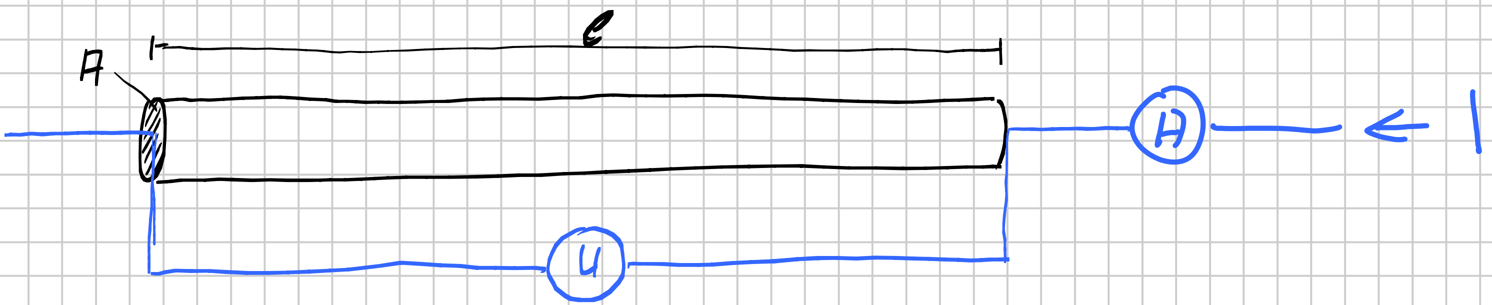
Die Mittelwerte dieser Messungen sowie die dabei gemachten relativen Fehler sind angegeben. Ermitteln Sie die elektrische Leitfähigkeit des Stabes und den mittleren relativen quadratischen Fehler der Messung von σ.

$I = 20\,A \qquad \Delta I/I = 1\%$

$U = 0{,}2\,V \qquad \Delta U/U = 1\%$

$l = 200\,mm \qquad \Delta l/l = 2{,}5\%$

$d = 4\,mm \qquad \Delta d/d = 5\%$



$$R = \frac{l}{A \cdot \sigma}$$

$$R = U/I$$

$$\frac{U}{I} = \frac{l}{A \cdot \sigma}$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

$$\frac{U}{I} = \frac{4 \cdot l}{\pi D^2 \sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{4 \cdot l \cdot I}{\pi \cdot D^2 \cdot U}$$

$$\sigma(\ell, D, I, U) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\ell \cdot I}{U D^2}$$

$$d\sigma = \frac{4}{\pi} \frac{\ell}{U D^2} \cdot dI + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I}{U D^2} \cdot d\ell - \frac{4}{\pi} \frac{\ell \cdot I}{U^2 \cdot D^2} dU - \frac{4}{\pi} \frac{2 \cdot \ell \cdot I}{U \cdot D^3} dD$$

$$= \frac{\sigma}{I} \cdot dI + \frac{\sigma}{\ell} \cdot d\ell - \frac{\sigma}{U} \cdot dU - 2 \cdot \frac{\sigma}{D} \cdot dD$$

$$\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \sqrt{(1\%)^2 + (2{,}5\%)^2 + (1\%)^2 + 4 \cdot (5\%)^2} = 10{,}4\%$$

Ein Rennmotorrad fährt an einem Beobachter vorbei.
Beim Herannahmen eines Motorrades nimmt der Beobachter am Straßenrand einen Ton mit der Frequenz f1 wahr. Die wahrgenommene Frequenz beim Davonfahren des Motorrades ist f2.

Die Frequenzen stehen im Verhältnis von f1 : f2 = 4 : 3.
Die Schallgeschwindigkeit beträgt 340 m/s

Wie schnell ist das Rennmotorrad?

$$\Rightarrow \quad f_1 = f \cdot \frac{1}{1 - v/c} \qquad \Rightarrow \quad f = f_1 (1 - v/c)$$

$$f_2 = f \cdot \frac{1}{1 + v/c} \qquad \Rightarrow \quad f = f_2 (1 + v/c)$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1 + v/c}{1 - v/c} = \ldots = \frac{c+v}{c-v} = \frac{4}{3}$$

$$4(c-v) = 3(c+v)$$

$$c = 7 \cdot v$$

$$v = \frac{c}{7} = \ldots = \approx 175\ \text{km/h}$$