Vorlesung 03 - Dynamik, Kräfte, Momente, Impulse

Notiztitel 11.04.2020

1. Newtonsches Gesetz => Trägheitsgesetz

Ein Körper verharrt solange im Zustand der Ruhe ($\vec{r}(t) = \vec{r}_0$) oder im Zustand konstanter Translation ($\vec{v}(t) = \vec{v}_0$), solange die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte 0 ist.

=> Folgt die Bewegung des Mondes um die Erde dem Trägheitsgesetz?

=> Mond bewegt sich im Abstand von 380.000 km in 27,3 Tagen um Erde

→ Mond bewegt sich also mit konstanter Bahngeschw. von $1 \frac{km}{s}$ um Erde

=> Aber Richtung der Bahngeschwindigkeit ändert sich => $\vec{v} \neq$ konstant

=> Mondbewegung um Erde folgt nicht dem Trägheitsgesetz!

2. Newtonsches Gesetz

=> Alltagserfahrung: 1) je größer Masse eines Körpers, desto mehr Kraft wird benötigt, um ihn zu bewegen => $\vec{F} \sim m$

2) je mehr Geschwindigkeitsänderung der Körper erfährt, desto mehr Kraft ist dafür nötig => $\vec{F} \sim \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

=> Warum hat Porsche stärkeren Motor als Polo?

=> $\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$ $\quad [F] = 1N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$

=> allgemeinere Formulierung => Bewegungszustand eines Körpers wird durch seine Masse m und seine Geschwindigkeit $\vec{v}$ beschrieben

=> Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow$ Kraft ist Änderung des Impulses mit der Zeit

$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})$

Masse muß im Zeitverlauf nicht konstant sein (Rakete!)

$\Rightarrow$ Produktregel für Ableitung $\Rightarrow \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\rightsquigarrow$ Wenn Masse im Zeitverlauf konstant, dann $\frac{dm}{dt} = 0$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \ddot{\vec{r}}}$$

Anwendung des 2. Newton'schen Gesetzes:

$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$

$\Rightarrow$ Bestimme jeweils wirkende Kraft $\vec{F}$

$\Rightarrow$ Berechne durch zweimalige Integration nach der Zeit den Ortsverlauf $\vec{r}$

Anwendung => Schwerkraft => $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$

=> $m\ddot{\vec{r}} = m \cdot \vec{g}$ => Hinweis => $m \cdot \ddot{\vec{r}}$ ↪ $m = m_t$ = träge Masse

$m\vec{g}$ ↪ $m = m_g$ = schwere Masse

↪ heutiges Wissen: $m_g = m_t = m$

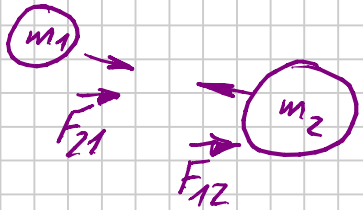
=> $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$ => eindimensionales Problem => $\vec{r} \to r$; $\vec{g} \to g$

=> $\ddot{r}(t) = g$ ↪ 1.x integrieren ↗

=> $\dot{r}(t) = g \cdot t + v_0$ ↪ 2.x integrieren ↗

=> $\boxed{r(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 \cdot t + s_0}$

3. Newtonsches Axiom



=> Bei Wechselwirkung zweier Körper mit m_1 und m_2 ist die Kraft, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, genau so groß aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft, die Körper 2 auf Körper 1 ausübt

=> **actio = reaktio**

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

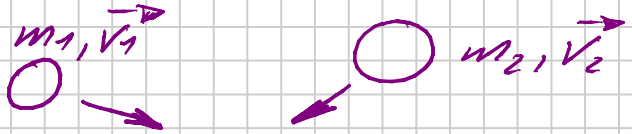
=> Kräfte treten nie einzeln, sondern immer paarweise auf !

Beispiele -> Fallschirmspringer (m_1) fällt wegen Erdanziehung auf Erde (m_2) zu und Erde bewegt sich auf Fallschirmspringer zu, weil sie von diesem angezogen wird.

$$\vec{F}_{12} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_z = -\vec{F}_{21} \qquad ; \qquad \gamma \cdot \frac{m_{Erde}}{r_{Erde}^2} = g$$

=> Student sitzt im Hörsaal und folgt Vorlesung. Gewichtskraft $\vec{F}_{12}$ drückt Student auf Stuhl. Stuhl erzeugt Gegenkraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{21}$ => $\vec{F}_{21}$ ist Führungskraft (leistet keine Arbeit)!

Anwendung 3. Newtonsches Axiom



=> im Moment des Aufpralls gilt: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

=> Zusammenhang Kraft $\vec{F}$ und Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ => $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}_{12} &= \frac{d\vec{p}_1}{dt} \\ \vec{F}_{21} &= \frac{d\vec{p}_2}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst}}$$

Impulserhaltungssatz!

=> Gesamtimpuls im abgeschlossenen System konstant!

Systeme

=> offenes System tauscht Materie und Energie mit seiner Umgebung aus

=> geschlossenes System tauscht Energie, aber keine Materie mit seiner Umgebung aus

=> abgeschlossenes System tauscht weder Energie noch Materie mit seiner Umgebung aus

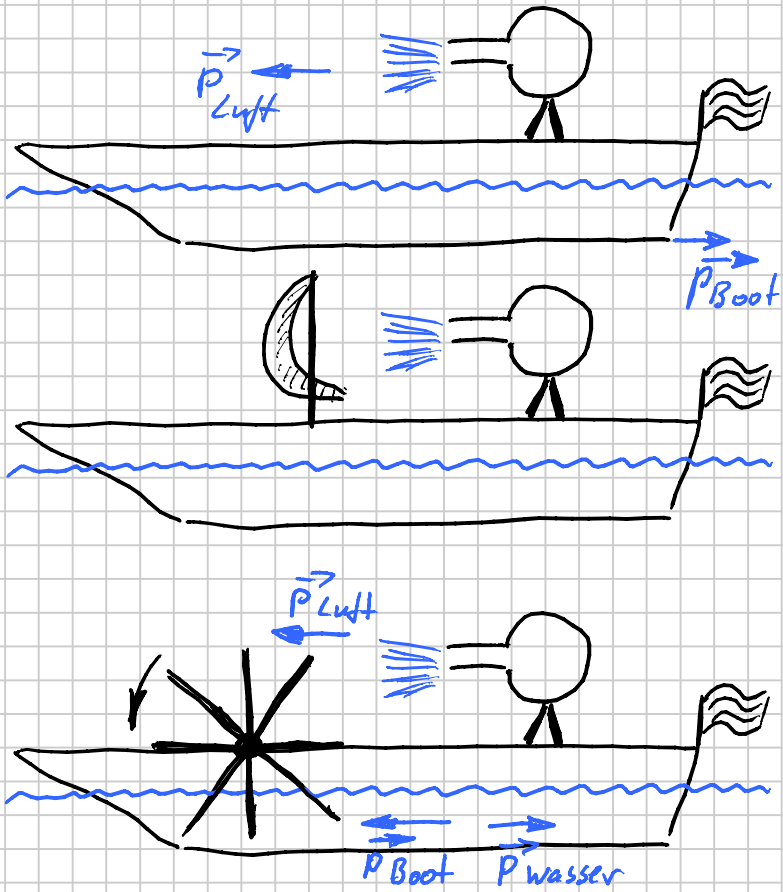
Gleichgewichte -> stabiles Gleichgewicht → kleine Auslenkungen führen zu Kräften / Momenten, die das System ins Gleichgewicht zurückführen

-> instabiles Gleichgewicht → kleine Auslenkung. führen zu Kräften / Momenten, die das System weiter weg vom Gleichgewicht führen

-> indifferentes Gleichgewicht → kleine Auslenkungen führen zu keinen Änderungen im System

-> metastabiles Gleichgewicht → kleine Auslenkungen können zu Kräften / Momenten führen, die in ein noch stabileres Gleichgewicht führen können

Beispiel Impulserhaltung



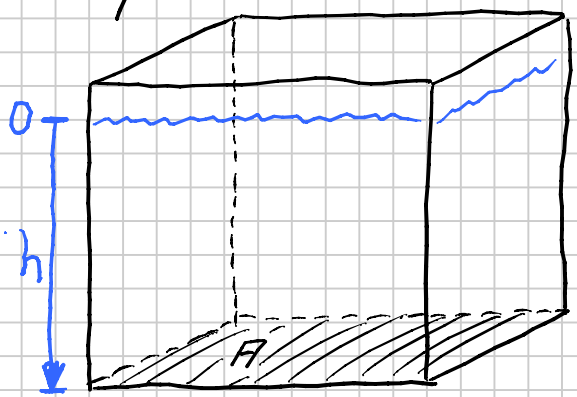
=> Boot soll mit Hilfe eines Blasebalgs angetrieben werden. Dafür hat sich Besatzung folgende Lösungen einfallen lassen.

=> Impuls Luft ←
=> Impuls Boot →
=> Boot fährt rückwärts

=> System Boot, Blasebalg, Segel abgeschlossen
=> Boot bleibt in Ruhe

=> Impuls der Luft wird über einen Drehimpuls an das Wasser übertragen
=> Boot fährt vorwärts

Auftrieb



- Behälter => Flüssigkeitsspegel bei $h=0$, Grundfläche A

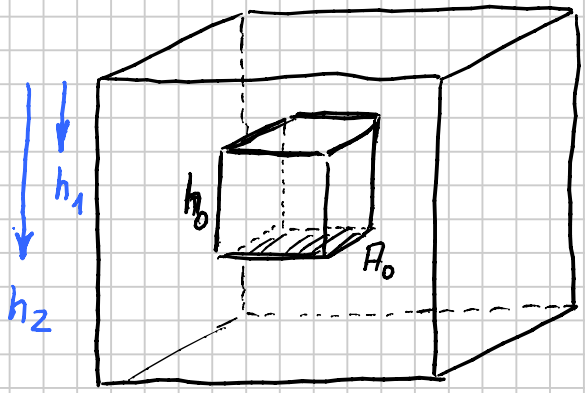
  => Kraft durch Gewicht des Wassers in einer Tiefe h

  => $F = m \cdot g = \rho_{FL} \cdot V_{FL} \cdot g$; ρ = Dichte, V = Volumen

  $$F = \rho_{FL} \cdot A \cdot h \cdot g \quad (1)$$

  => Druck p auf Fläche A => $p = \frac{F}{A} = \frac{\rho_{FL} \cdot A \cdot h \cdot g}{A}$

  $$p = \rho_{FL} \cdot h \cdot g$$



- Körper der Höhe $h_0 = h_2 - h_1$ und Grundfläche A_0 in der Flüssigkeit

  => wirkende Kraft F_o an Oberseite des Körpers: (1) => $F_o = \rho_{FL} \cdot A_0 \cdot h_1 \cdot g$

  => wirkende Kraft F_u an Oberseite des Körpers: (1) => $F_u = \rho_{FL} \cdot A_0 \cdot h_2 \cdot g$

  => wirkende Kräfte an den Seiten => heben sich auf!

- Auftriebskraft $F_A = F_u - F_o$

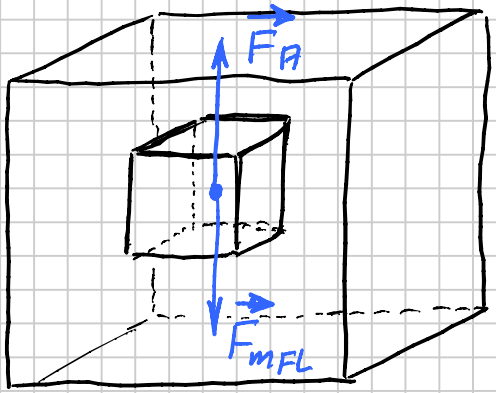
$= \rho_{FL} \cdot A_0 \cdot h_2 \cdot g - \rho_{FL} \cdot A_0 \cdot h_1 \cdot g$

$= \rho_{FL} \cdot g \cdot A_0 \cdot (h_2 - h_1)$

$A_0 \cdot (h_2 - h_1)$ = Volumen des Körpers

$F_A = g \cdot \rho_{FL} \cdot V_{Körper}$

$\rho_{FL} \cdot V_{Körper}$ = Masse m_{FL} der vom Körper verdrängten Flüssigkeit



$$F_A = \rho \cdot m_{FL}$$
$$= g \cdot \rho_{FL} \cdot V_{FL}$$

Auftriebskraft $\vec{F}_A$ ist entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft $\vec{F}_{m_{FL}}$ der vom Körper verdrängten Flüssigk.

Beispiel => Wie sehr beeinflusst der Auftrieb das Messergebnis beim Wiegen?

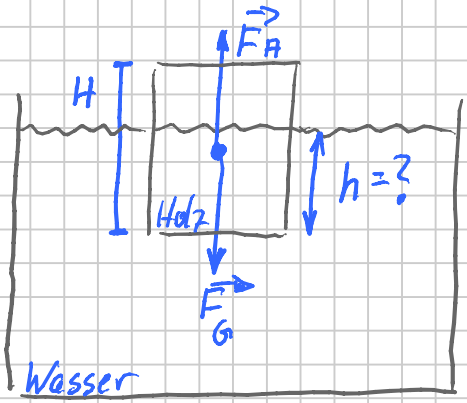
=> geg./Annahmen: $V_{Mensch} \approx 80\,dm^3$ ges. $F_A = ?$

$\rho_{Luft} \approx 1{,}3 \frac{g}{dm^3}$

=> Lösung $F_A = g \cdot m_{Luft} = g \cdot \rho_{Luft} \cdot V_{Luft} = 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1{,}3 \frac{g}{dm^3} \cdot 80\,dm^3$

$F_A \approx 1000 \frac{m \cdot g}{s^2} = 1N$ (entspricht ca. 100 g)

Beispiel => Wie tief taucht ein Holzquader der Höhe $H = 60\,cm$ und mit dem Querschnitt A sowie der Dichte $\rho_H = 0{,}65 \frac{g}{cm^3}$ in Wasser ein?



geg: $H = 60\,cm$
$\rho_H = 0{,}65\,g/cm^3$
$\rho_W = 1\,g/cm^3$

ges: $h = ?$

Lösung: $F_G = m_H \cdot g = \rho_H \cdot V_H \cdot g = \rho_H \cdot A \cdot H \cdot g$

$F_A = m_W \cdot g = \rho_W \cdot V_W \cdot g = \rho_W \cdot A \cdot h \cdot g$

Kräftegleichgewicht: $|\vec{F}_G| = |\vec{F}_A|$

$\rho_H \cdot A \cdot H \cdot g = \rho_W \cdot A \cdot h \cdot g$

$\rho_H \cdot H = \rho_W \cdot h$

$\hookrightarrow \quad h = \frac{\rho_H}{\rho_W} \cdot H$

$= \frac{0{,}65}{1} \cdot 60\,cm \Rightarrow \underline{h = 39\,cm}$